

Фундам. ф-ла Грина (зв-я ф-ла Грина)

25/11

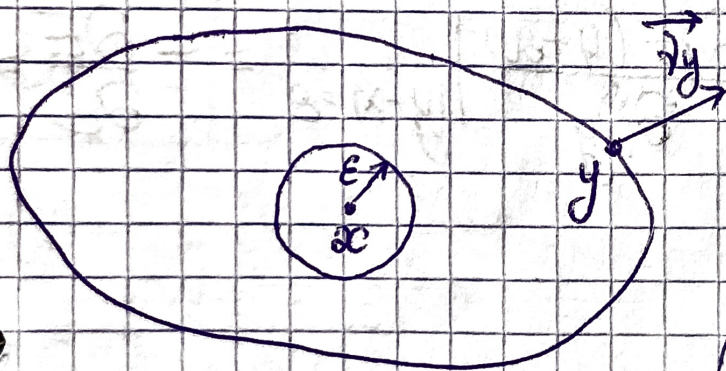
Фунд. реш. ур-ния Лапласа: $E(x) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & n=2, \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{n(n-2)|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Ситуация Ω -обл-ть в $\mathbb{R}^n$, огранич., $\Omega \in (GO)$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}_y$ - единич. внешн. нормаль к границе.



$y = (y_1, \dots, y_n)$ - переменная функция ($y \in \partial\Omega$ и $y \in \Omega$)

Выберем и зафиксируем $x \in \Omega$; $E(y-x)$ - сдвинутое фундамент. реш. с центр. в т. x ;

$\exists \varepsilon_0 > 0$: $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$;

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon(x)$ - модифицированная обл-ть;

$$v(y) \equiv E(y-x), \quad v \in C^2(\Omega_\varepsilon)$$

$\chi \in C^2(\Omega)$. Применим эту ф-лу Грина к паре $u(y), v(y) = E(y-x)$ в обл-ти Ω_ε ;

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (v(y) \Delta u(y) - u(y) \Delta v(y)) dy = \int_{\partial \Omega_\varepsilon} (v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} -$$

$$- u(y) \frac{\partial v(y)}{\partial \vec{n}_y}) ds_y \quad (\Delta v(y) = \Delta_y E(y-x) = 0 \text{ всюду в } \Omega_\varepsilon)$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (E(y-x) \Delta u(y) - 0) dy = \int_{\partial \Omega} (E(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} - u(y) \cdot$$

$$\frac{\partial E(y-x)}{\partial \vec{n}_y}) ds_y + \int_{S_\varepsilon} (E(\varepsilon) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} - u(y) \left(-\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \right)) ds_y$$

$$\parallel S_\varepsilon(x) = \partial B_\varepsilon(x) : |y-x| = \varepsilon \parallel$$

$$\parallel \partial E / \partial r = 1 / (\omega_n r^{n-1}) \parallel$$

В данном случае $\frac{\partial E(y-x)}{\partial \vec{n}_y} \Big|_{|y-x|=\varepsilon} = -\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} =$

$$= -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}}$$

Отсюда χ 2 послед. ф-ла:

$$\left| \int_{S_\varepsilon} E(\varepsilon) \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} ds_y \right| \leq |E(\varepsilon)| \cdot C \cdot \omega_n \varepsilon^{n-1} = \omega_n C \varepsilon$$

$$\parallel \left| \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} \right| = |(\nabla u(y), \vec{n}_y)| \leq |\nabla u(y)| \cdot |\vec{n}_y| = |\nabla u(y)| \leq C,$$

$\forall y \in \Omega$ (огранич-ть на компакте) //

$$\varepsilon^{n-1} |E(\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0 \parallel \text{см. св-во (5) из пред. лекции} \parallel$$

$$\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon} u(y) ds_y \rightarrow \parallel \text{среднее знач. } u(y) \text{ на сфере} \parallel \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} u(x)$$

в силу непрерывности функции u .

Доказательство: $\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\Omega_\varepsilon} E(y-x) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega} E(y-x)$

$-x) \Delta u(y) dy$ — н.и. конечен и $=: \int_{\Omega} E(y-x)$

$$\Delta u(y) dy = \int_{\partial \Omega} \left(E(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} - u(y) \frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y} \right) dS_y + 0 + u(x)$$

Отсюда $u(x) = \int_{\Omega} E(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right.$

$u(y) - E(y-x) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \Big) dS_y, \forall x \in \Omega$. При этом $E(y-x) = E(x-y)$

Конкретнее получаем функ. ф-лу

Грина: $u(x) = \int_{\Omega} E(x-y) \Delta u(y) dy + \int_{\partial \Omega} \left(\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right.$

$u(y) - E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \Big) dS_y, \forall x \in \Omega \quad (1)$

$\downarrow \exists u \in C^2(\bar{\Omega})$, где Ω — обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \in (GO)$. Тогда $\forall x \in \Omega$ справедлива ф-ла (1), где $E(x)$ — функ. реш. ур-ния Лапласа.

Комментарий: ф-ла (1) несколько

избыточна; д/восстановления знач-й $u(x)$ она требует знания $\Delta u(y)$ в Ω , $u(y)|_{\partial \Omega}$ и $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}|_{\partial \Omega}$. Но эти величины не авт-ся

независимыми

Ф/применения к стандарт. зад-м (Дир. и Нейм.) ф-лы (1) надо дополнительно модифицировать

Лемма Грина: ф-лы в ф-ле (1) имеют специал. физ. смысл:

1) $\int E(x-y) \rho(y) dy$ - объем. потенциал, с плотностью ρ ;

2) $\int_{\partial\Omega} E(x-y) j(y) ds_y$ - потенциал простого слоя с пл-тью j .

3) $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \mu(y) ds_y$ - потенциал двойного слоя с пл-тью μ .

Ф-ла (1) дает представление $\rho/\mu(x)$ в виде $\sum$ трех потенциалов

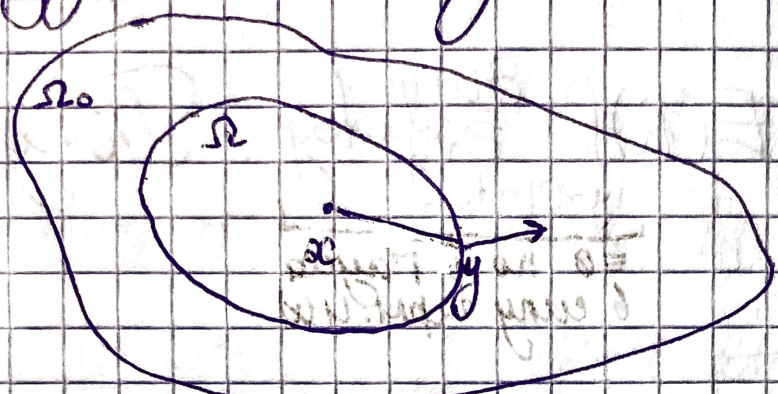
Факт частный случай: $v \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\Delta u(x) = 0$ в обл-ти G , $u(x)$ - гарм. ф-ция в Ω . Ф-ла (1) принимает вид:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} u(y) - E(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right) ds_y, \quad \forall x \in \Omega \quad (2)$$

Ф-ла (2) - формула Грина ρ /гарм. ф-ций

Лем. (2): Лем. 1:

∇ (Беск. дифф-ть гарм. ф-ций) Ω_0 -произв. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega_0)$, причем $\Delta u(x) = 0$ всюду в Ω_0 . Тогда $u \in C^\infty(\Omega_0)$

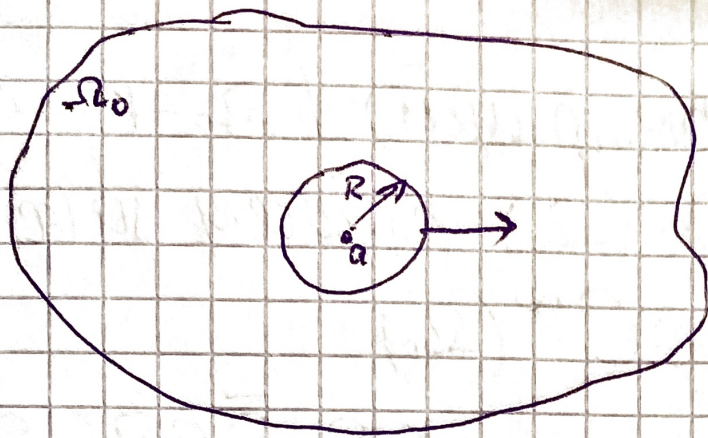


$\exists \Omega: \bar{\Omega} \subset \Omega_0, \Omega \in (GO)$ (Ω -отр. обл-ть)
 $\Rightarrow u \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\Delta u(x) = 0$ в Ω .

Запишем ф-лу (2) г/т $x \in \Omega$. Имеем $|x - y| \geq \delta > 0$ г/т $y \in \partial\Omega \Rightarrow$ оба f_n в (2) - обычные собств. f_n . При этом $\frac{\partial E(x-y)}{\partial y_j}$

$E(x-y) \propto$ дифф. по $x \in \Omega$ ф-ции. По ∇ 0 дифф-нии собств. f_n ов Римана по параметру, получаем, что $u \in C^\infty(\Omega)$ (см. ф-лу (2)), $\forall \Omega \in \Omega_0 \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega_0)$ ■

Лем. 2: ∇ (о среднем г/ гарм. ф-ций). Ситуация Ω_0 -произв. обл-ть в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega_0)$ и $\Delta u(x) = 0$ ~~всюду~~ всюду в Ω_0 . Спектр-бол $\Omega = B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n: |y-x| < R\}$. При этом $\Omega = B_R(x) \in \Omega_0$. Тогда $u \in C^2(B_R(x))$ и по



Ф-на (2) невырожден:

$$u(x) = \int_{|y-x|=R} \left(\frac{1}{\omega_n R^{n-1}} u(y) - \right.$$

$$\left. - E(R) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) ds_y =$$

$$= \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(y) ds_y - E(R) \int_{|y-x|=R} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds_y \quad \text{Понизее:}$$

$\equiv 0$ по Т. Гурски
б. сущ. гарм. $u(x)$

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(y) ds_y \quad (3)$$

Ф-на (3) показывает, что знач. гарм. ф-ции в центре шара = среднему значению по границе шара, т.е. по сфере

Вариант: среднее по шарам: из (3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{|y-x|=r} u(y) ds_y = \omega_n r^{n-1} u(x), \quad \forall r \in (0, R) \quad \text{от}$$

$$\text{сюда, } \int_{|y-x| \leq R} u(y) dy = \int_0^R dr \int_{|y-x|=r} u(y) ds_y = \int_0^R \omega_n r^{n-1} \cdot$$

$$\cdot u(x) dr = \omega_n \frac{r^n}{n} \Big|_0^R u(x) = \omega_n \cdot \frac{R^n}{n} \cdot u(x) = \beta_n \cdot R^n \cdot$$

$$\cdot u(x), \text{ где } \beta_n - \text{объем единичн. шара.}$$

$$\text{Окончательно получаем } u(x) = \frac{1}{\beta_n R^n} \int_{|y-x| \leq R} u(y) dy$$

в/в гарм. ф-ции $u(x)$